6.04.2020

Дисципліна «Аналітична геометрія» (група 121)

Тема лекції: Рухи площини

1 Відображення і перетворення множин

Відображення однієї множини в іншу. Образ і прообраз елемента. Види відображень. Обернене відображення. Перетворення множини. Група перетворень множини. Підгрупа групи перетворень. Еквівалентність фігур відносно групи перетворень.

Нехай X і Y — непорожні множини. Припустимо, що кожному елементу $x \in X$ поставлений у відповідність певний елемент $y \in Y$. Тоді кажуть, що задане *відображення множини* X *в множину* Y. Це відображення позначають однією літерою, наприклад f, і пишуть так: $f\colon X \to Y$ або $X \xrightarrow{f} Y$. Елемент $y \in Y$ називають *значенням* функції f для елемента $x \in X$ і його позначають через $f(x)$, тобто $y = f(x)$. Елемент $y = f(x)$ називається *образом* елемента $x \in X$, а x — *прообразом* елемента $y \in Y$, і при цьому пишуть: $f\colon x \mapsto y$ або $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Нехай $f\colon X \to Y$ є відображення. Якщо для довільних двох елементів $x_1, x_2 \in X$ виконується $f(x_1) \neq f(x_2)$, то відображення f називається *ін'єкцією*. Якщо ж $f(X) = Y$, тобто кожна елемент множини Y є образом хоч одного елемента множини X, то f називається називається відображенням X *на* Y або *сюр'єкцією*. Відображення, яке одночасно є ін'єкцією і сюр'єкцією, називається *взаємно однозначним відображенням* X *на* Y або *бієкцією*.

Нехай $f\colon X \to Y$ є бієкція, тоді можна побудувати інше відображення $f^{-1}\colon Y \to X$ за законом $f^{-1}\colon y \mapsto x$, якщо $f\colon x \mapsto y$. Відображення f^{-1} називають *оберненим відображенням* до f. Якщо множини X і Y співпадають, тобто $X = Y$, то бієкція $f\colon X \to X$ називається *перетворенням множини* X.

В курсі аналітичної геометрії, а також в інших курсах геометрії, нам часто доводиться користуватись поняттям групи, яке вводиться в курсі алгебри, тому пригадаємо її означення. Як відомо *групою* називається впорядкована пара $(G, \cdot)$, де G — непорожня множина, на якій задана бінарна операція $\cdot$, яка задовольняє наступні три аксіоми:

1. Бінарна операція $\cdot$ асоціативна, тобто для довільних елементів $x, y, z \in G$ виконується рівність: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

2. В множині G існує такий елемент e, який називається нейтральним або *одиницею*, що має місце $x \cdot e = e \cdot x = x$ для довільного елемента $x \in G$.

3. Для кожного елемента $x \in G$ існує такий елемент $x^{-1} \in G$, який називається оберненим елементом до x, що $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

В курсі алгебри доводять, що група має лише одну одиницю, а кожен елемент групи володіє лише одним оберненим до нього елементом.

Нехай $(G, \cdot)$ — група і $H \subset G$, $H \neq \varnothing$. Якщо $(H, \cdot)$ є група, то вона називається *підгрупою* групи $(G, \cdot)$. Має місце така теорема:

Теорема 1.19. *Непорожня множина H групи $(G, \cdot)$ є її підгрупою, якщо вона задовольняє наступні дві умови:*

1) Якщо $x \in H$ і $y \in H$, то $x \cdot y \in H$.

2) Якщо $x \in H$, то $x^{-1} \in H$.

Розглянемо тепер деяку непорожню множину E і позначимо через G_E множину всіх перетворень множини E. Введемо на множині G_E бінарну операцію $\circ$ таким чином. Для довільних перетворень $f, g \in G_E$ і довільного елемента $x \in E$ покладемо $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Введену операцію будемо називати *операцією суперпозиції* перетворень. Отже, на множині G_E визначена бінарна операція суперпозиції $\circ$, яку часто називають множенням перетворень.

Теорема 1.20. *Впорядкована пара* $(G_E, \circ)$, *де* $\circ$ *— суперпозиція перетворень, є група.*

В алгебрі групу $(G_E, \circ)$ називають *симетричною групою перетворень множини* E, а кожну її підгрупу називають просто *групою перетворень множини* E. Щоб переконатись в тому, що деяка непорожня множина H перетворень множини E є групою перетворень згідно теореми 1.19 достатньо перевірити виконання двох умов:

1. Якщо $f \in H$ і $g \in H$, то $g \circ f \in H$.

2. Якщо $f \in H$, то $f^{-1} \in H$.

Нехай E — непорожня множина, а G — деяка група перетворень цієї множини. Підмножина F множини E називається *еквівалентною* підмножині F' множини E, якщо в групі G знайдеться таке перетворення f, яке F переводить в F', при цьому пишуть $F \overset{G}{\sim} F'$. Отже,

$$F \overset{G}{\sim} F' \Longleftrightarrow (\exists f \in G) f(F) = F'.$$

Розглянемо деякі властивості цього поняття:

- *Рефлексивність*, тобто для довільної фігури[15] F виконується $F \overset{G}{\sim} F$. Дійсно, $\Delta_E(F) = F$, де Δ_E — одиниця групи G. Таким чином, в групі G знайшлось перетворення, яке переводить фігуру F саму в себе. Це означає, що $F \overset{G}{\sim} F$.

- *Симетричність*, тобто якщо $F \overset{G}{\sim} F'$, то $F' \overset{G}{\sim} F$ для довільних фігур $F, F' \subset E$. Оскільки $F \overset{G}{\sim} F'$, то існує перетворення $f \in G$ таке, що $f(F) = F'$, тому $f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(F')$. Отже, $f^{-1}(F') = (f^{-1} \circ f)(F) = \Delta_E(F) = F$. Оскільки $f^{-1} \in G$, то отримане означає $F' \overset{G}{\sim} F$.

- *Транзитивність*, тобто якщо $F \overset{G}{\sim} F'$ і $F' \overset{G}{\sim} F''$, то $F \overset{G}{\sim} F''$. За означенням еквівалентності фігур маємо $f(F) = F'$ і $g(F') = F''$ для деяких $f, g \in G$. Звідки отримуємо $(g \circ f)(F) = g(f(F)) = g(F') = F''$. Оскільки $g \circ f \in G$, то, очевидно, $F \overset{G}{\sim} F''$.

Таким чином, еквівалентність фігур є *відношенням еквівалентності* на множині всіх підмножин множини E. Якщо фігури F і F' еквівалентні відносно групи G, то говорять, що вони G-*еквівалентні*.

2 Рух площини

Означення руху (переміщення) площини. Афінний і ортонормований репери. Теорема про дію руху на репер. Основна теорема руху. Властивості руху. Означення прапора та теорема про існування руху.

Означення 1.16. *Перетворення площини, яке зберігає відстань між точками, називається рухом (або переміщенням).*

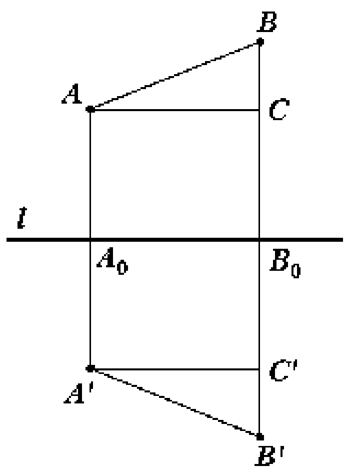
Таким чином, якщо g — рух площини σ, A, B, A', B' — точки цієї площини такі, що $g\colon A \mapsto A'$, $g\colon B \mapsto B'$, то $AB = A'B'$.

Приклад 1. Нехай σ є площина, $\vec{p}$ — ненульовий вектор, паралельний до цієї площини. Перетворення $f\colon \sigma \to \sigma$ називається *паралельним перенесенням площини σ на вектор $\vec{p}$*, якщо воно визначається таким чином:

$$f\colon M \mapsto M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{p}, \tag{1.62}$$

для довільних точок $M, M' \in \sigma$. Доведемо, що паралельне перенесення площини є рух. Дійсно, нехай $M_1, M_2, M_1', M_2' \in \sigma$, причому $f\colon M_1 \mapsto M_1'$, $M_2 \mapsto m_2'$, тоді згідно (1.62) маємо $\overrightarrow{M_1M_1'} = \vec{p}$ і $\overrightarrow{M_2M_2'} = \vec{p}$, звідки $\overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'}$. Отже, згідно леми 1.1 виконується $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1'M_2'}$, тому $M_1M_2 = M_1'M_2'$. Це означає, що паралельне перенесення є рух.

Приклад 2. Нехай l є деяка пряма в площині σ. Визначимо тепер перетворення цієї



площини, яке ми називатимемо *осьовою симетрією відносно прямої l*. Будемо казати, що точка A' *симетрична точці A відносно прямої l*, якщо пряма AA' перпендикулярна прямій l, і ці точки знаходяться на однакових відстанях від неї, тобто $AA' \perp l$ і $AA_0 = A_0A'$ (див. рис.). Перетворення площини, яке кожній її точці ставить у відповідність симетричну точку відносно прямої, називається *осьовою симетрією відносно прямої*. Доведемо, що вона є рух. Дійсно, нехай $f\colon \sigma \to \sigma$ є осьова симетрія відносно прямої l, A, A', B, B' — точки площини σ такі, що $f\colon A \mapsto A'$ і $f\colon B \mapsto B'$. Нехай $AC \perp BB'$ і $A'C' \perp BB'$. Ясно, що $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, звідки випливає рівність $AB = A'B'$. Отже, ми довели, що перетворення f — рух.

Нагадаємо (див. означення 1.10), що афінним репером називається впорядкована трійка точок A, B, C площини (вершини репера), що не лежать на одній прямій, і позначається він $R = (A, B, C)$. Кожному такому реперу відповідає афінна система координат $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, де $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Репер R називається *ортонормованим*, якщо йому відповідає прямокутна декартова система координат.

Теорема 1.21 (дія руху на репер). *При кожному русі репер переходить в репер, причому ортонормований репер переходить в ортонормований репер.*

Теорема 1.22 (основна теорема руху). *Нехай $R = (A, B, C)$ і $R' = (A', B', C')$ є довільні ортонормовані репери на площині σ. Тоді існує один і тільки один рух, який репер R переводить в репер R'. При цьому русі кожна точка M з даними координатами в репері R переходить в точку M' з такими ж самими координатами в репері R'.*

Використовуючи тепер теорему 1.22 доведемо ряд властивостей руху.

1°. *Рух переводить пряму у пряму, а паралельні прямі — в паралельні прямі.*

2°. *Рух переводить напівплощину з межею l в напівплощину з межею l', де l' — образ прямої l.*

Означення 1.17. *Простим відношенням трьох точок A, B, C однієї прямої називається число λ, в якому точка C ділить направлений відрізок $\overline{AB}$ і позначається:* $\lambda = (AB, C)$.

3°. *Рух зберігає просте відношення трьох точок прямої.*

4°. *Рух зберігає відношення "лежати між".*

5°. *Рух переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$, де A', B' — образи точок A, B. При цьому середина відрізка AB переходить в середину відрізка $A'B'$.*

6°. *Рух переводить промінь в промінь, а кут — в кут.*

7°. *Рух переводить кут в рівний йому кут.*

Означення 1.19. *Репери $R = (O, A, B)$ і $R' = (O', A', B')$ називаються однаково орієнтованими, якщо базиси $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ і $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ орієнтовані однаково (див. означення 1.14).*

Будемо казати, що перетворення площини *зберігає* (*змінює*) орієнтацію, якщо довільний репер і його образ однаково орієнтовані (протилежно орієнтовані).

Теорема 1.24. *Довільний рух або зберігає, або змінює орієнтацію площини.*

Аналітичне задання руху. Нехай g — рух, $R = (O, E_1, E_2)$ — ортонормований репер, $M(x, y)$ — довільна точка площини, задана координатами в репері R, $M'(x', y')$ — образ точки M з координатами в репері R, тобто $M \xrightarrow{g} M'$. Нехай далі $R' = (O', E'_1, E'_2)$ є образ репера R при русі g, тобто $R' = g(R)$. Припустимо, що точка O' в репері R має координати $O'(x_0, y_0)$ і α є кут між векторами $\overrightarrow{OE_1}$ і $\overrightarrow{O'E'_1}$, тобто $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{O'E'_1}})$. Оскільки g — рух, то за основною теоремою руху точка M' в репері R' має такі самі координати, як точка M в репері R, тобто $M'(x, y)_{R'}$.

Отже, маємо $M'(x', y')_R$ — старі координати, $M'(x, y)_{R'}$ — нові координати, тому за формулами перетворення прямокутних координат (1.35) маємо:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{1.70}$$

де $\varepsilon = 1$ для руху першого роду і $\varepsilon = -1$ для руху другого роду. Формули (1.70) надалі будемо називати *формулами руху на площині.*

Означення 1.20. *Матриця* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *називається ортогональною, якщо її елементи задовольняють такі рівності:*

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 - b_2^2 = 1, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \tag{1.71}$$

Теорема 1.25 (ознака руху). *Якщо аналітичне задання відображення $f\colon \sigma \to \sigma$ площини σ в ортонормованому репері $R = (O, E_1, E_2)$ визначається формулами*

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + x_0, \\ y' &= a_2x + b_2y - y_0, \end{aligned} \tag{1.72}$$

де $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *— ортогональна матриця, то f є рух, причому якщо $\delta = 1$, то f — рух першого роду, а при $\delta = -1$ перетворення f є рух другого роду, де* $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

10.04.2020

Дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

(групи 131, 132, 141, 161)

Тема лекції: Лінійні оператори

В теорії лінійних просторів важливу роль відіграють *лінійні оператори*, які ще називають *лінійним «перетворенням»* простору.

У векторному просторі L заданий оператор, якщо вказано правило (закон), за яким кожному вектору $\vec{x} \in L$ ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{x}' \in L$. Вектор $\vec{x}'$ називають образом вектора $\vec{x}$, а $\vec{x}$ - прообразом вектора $\vec{x}'$.

Отже, оператор у векторному просторі L - це функція, множиною визначення і множиною значень якої є простір L.

Оператори позначають буквами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ..., \varphi, \psi, f$.

Образ вектора $\vec{x}$ при дії оператора $\mathcal{A}$ позначають символом $\vec{x}' = \vec{x}\mathcal{A}$.

Оператори в просторі L називають ще операторами простору L, перетвореннями простору L, відображенням простору L в себе.

Оператор $\mathcal{A}$ в векторному просторі L називають *лінійним*, якщо він задовольняє наступним умовам:

1. $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L \quad (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \mathcal{A} = \vec{x}_1 \cdot \mathcal{A} + \vec{x}_2 \cdot \mathcal{A}$;
2. $\forall \vec{x} \in L \quad (\lambda\vec{x}) \cdot \mathcal{A} = \lambda \cdot (\vec{x}\mathcal{A})$.

Лінійні оператори в просторі L називають також *лінійними перетвореннями* простору L.

Із означення лінійного оператора випливають наступні *властивості*:

1. Будь-який лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L залишає нерухомим нульовий вектор $\vec{0}$ цього простору.
2. Будь-який лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L протилежному вектору $-\vec{x}$ довільного вектора $\vec{x}$ ставить у відповідність вектор, протилежний образу вектора $\vec{x}$.

3. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L будь-якій лінійній комбінації довільно вибраних векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ простору L ставить у відповідність лінійну комбінацію (з тими ж коефіцієнтами) образів цих векторів.

З'ясуємо, якими елементами можна задати лінійний оператор в просторі L_n.

Задати лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L_n - це означає задати образи всіх векторів кожного базису цього простору.

Якщо відомі образи всіх векторів одного з базисів простору L_n при дії оператора $\mathcal{A}$, то можна знайти образи всіх векторів простору при дії цього оператора.

Теорема 1. Будь-який оператор $\mathcal{A}$ в просторі L_n однозначно визначається заданням образів $\vec{e}_1\mathcal{A}, \vec{e}_2\mathcal{A}, ..., \vec{e}_n\mathcal{A}$ всіх векторів будь-якого фіксованого базису $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ цього простору.

Теорема 2. Якою б не була впорядкована система з n векторів простору L_n

$$\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n, \quad (*)$$

існує, і до того ж тільки один, лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n такий, що вектори системи (*) будуть образами векторів базису $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ при дії цього оператора.

Нехай $\mathcal{A}$ - деякий лінійний оператор в L_n, $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ - будь-який базис цього простору. Оператор $\mathcal{A}$ відображає вектори цього базису в деякі вектори $\vec{e}_1\mathcal{A}, \vec{e}_2\mathcal{A}, ..., \vec{e}_n\mathcal{A}$ кожний з яких одночасно виражається через вектори базису B.

Нехай

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1\mathcal{A} = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + ... + \alpha_{1n}\vec{e}_n, \\
&\vec{e}_2\mathcal{A} = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + ... + \alpha_{2n}\vec{e}_n, \\
&.. \\
&\vec{e}_n\mathcal{A} = \alpha_{n1}\vec{e}_1 + \alpha_{n2}\vec{e}_2 + ... + \alpha_{nn}\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

З коефіцієнтів α_{ik} складаємо матрицю

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix},$$

рядками якої є координатні рядки векторів $\vec{e}_i\mathcal{A}$ $(i=\overline{1,n})$ в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$. Оскільки координатні рядки векторів $\vec{e}_i\mathcal{A}$ визначаються однозначно, то і матриця A визначається оператором $\mathcal{A}$ однозначно.

Матрицю A називають *матрицею лінійного оператора* $\mathcal{A}$ в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$. Отже в базисі B лінійний оператор $\mathcal{A}$ задається матрицею A.

При фіксованому базисі B кожному лінійному оператору $\mathcal{A}$ простору L_n відповідає певним способом визначена матриця $n-$го порядку – матриця цього лінійного оператора. І, навпаки, кожна матриця $n-$го порядку $B=(\beta_{ik})$ є матрицею деякого лінійного оператора простору L_n в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$.

Дійсно, знаючи матрицю $B=(\beta_{ik})$, знайдемо вектори:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \beta_{11}\vec{e}_1+\beta_{12}\vec{e}_2+\dots+\beta_{1n}\vec{e}_n,\\ \vec{b}_2 &= \beta_{21}\vec{e}_1+\beta_{22}\vec{e}_2+\dots+\beta_{2n}\vec{e}_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \vec{b}_n &= \beta_{n1}\vec{e}_1+\beta_{n2}\vec{e}_2+\dots+\beta_{nn}\vec{e}_n.\end{aligned}$$

за теоремою 2 визначимо лінійний оператор.

В просторі L_n, який вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ відображає відповідно у вектори $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$. Оператор $\mathcal{B}$ - єдиний, його матрицею в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ є матриця B.

Отже, якщо в лінійному просторі L_n над полем P обрано базис $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ і кожному оператору $\mathcal{A}$ простору L_n поставлено у відповідність матрицю A цього оператора в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$, то цим буде встановлена взаємно-однозначна відповідність між всіма лінійними операторами простору L_n і всіма матрицями $n-$го порядку над полем P.

З'ясуємо, як знаючи матрицю лінійного оператора $\mathcal{A}$ і координати вектора $\vec{x}$ в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$, знайти координати вектора $\vec{x}\mathcal{A}$ в цьому ж базисі. Нехай $A=(\alpha_{ik})$ - матриця оператора $\mathcal{A}$ в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ і вектор $\vec{x}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+...+\lambda_n\vec{e}_n$. Тоді $\vec{x}\mathcal{A}=\lambda_1\vec{e}_1\mathcal{A}+\lambda_2\vec{e}_2\mathcal{A}+...+\lambda_n\vec{e}_n\mathcal{A}$.

Але $\vec{e}_i\mathcal{A}=\alpha_{i1}\vec{e}_1+\alpha_{i2}\vec{e}_2+...+\alpha_{in}\vec{e}_n \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$

Тому

$$\vec{x}\mathcal{A}=\lambda_1(\alpha_{11}\vec{e}_1+\alpha_{12}\vec{e}_2+...+\alpha_{1n}\vec{e}_n)+\lambda_2(\alpha_{21}\vec{e}_1+\alpha_{22}\vec{e}_2+...+\alpha_{2n}\vec{e}_n)+ \\ +...+\lambda_n(\alpha_{n1}\vec{e}_1+\alpha_{n2}\vec{e}_2+...+\alpha_{nn}\vec{e}_n).$$

Позначаючи координатний рядок вектора $\vec{x}$ через $[\vec{x}]$, а координатний рядок вектора $\vec{x}\mathcal{A}$ - символом $[\vec{x}\mathcal{A}]$, одержуємо

$$[\vec{x}\mathcal{A}]= \\ =[\lambda_1\alpha_{11}+\lambda_2\alpha_{21}+...+\lambda_n\alpha_{n1},\lambda_1\alpha_{12}+\lambda_2\alpha_{22}+...+\lambda_n\alpha_{n2},...,\lambda_1\alpha_{1n}+\lambda_2\alpha_{2n}+...+\lambda_n\alpha_{nn}]=, \\ =[\vec{x}]A$$

тобто $[\vec{x}\mathcal{A}]=[\vec{x}]A$.

Отже, справедливе *твердження*:

Координатний рядок вектора $\vec{x}\mathcal{A}$ в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ дорівнює добутку координатного рядка вектора $\vec{x}$ на матрицю лінійного оператора $\mathcal{A}$ в цьому базисі.

Матриці є тим аналітичним апаратом, за допомогою якого вивчаються лінійні оператори в скінченновимірних просторах. Кожний лінійний оператор простору L_n задається в обраному базисі певною матрицею. При зміні базису матриця лінійного оператору також буде змінюватися.

Як же пов'язані матриці, які задають один і той же оператор, в різних базисах?

Лема: Нехай $A=(\alpha_{ij})$ і $B=(\beta_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ - матриці над полем P. Якщо для будь-якого рядка $[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]$ з елементами з поля P

$[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]A=[\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n]B$, то $A=B$.

Теорема. Якщо лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n задається в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ матрицею A, то в базисі $B'<\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',...,\vec{e}_n{}'>$ він задається матрицею $A'=T\cdot A\cdot T^{-1}$, де T - матриця переходу від базису B до базису B'.

З'ясуємо, що являє собою матриця переходу T від базису $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ до базису $B'<\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},...,\vec{e}_n^{\,\prime}>$ з точки зору теорії лінійних операторів.

Існує тільки один лінійний оператор $\mathcal{T}$, який переводить вектори базису B у відповідні вектори базису B' такий, що

$$\vec{e}_i\mathcal{T}=\vec{e}_i^{\,\prime} \qquad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

Рядками матриці оператору $\mathcal{T}$ в базисі B є координатні рядки векторів $\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},...,\vec{e}_n^{\,\prime}$ в цьому базисі. Але координатні рядки векторів $\vec{e}_i^{\,\prime}$ в базисі B є рядками і матриці переходу T від базису B до базису B'.

Отже, матриця переходу T є матрицею оператора $\mathcal{T}$, який переводить базис B в базис B' обчислена в базисі B. Але матриця переходу T є матрицею оператора $\mathcal{T}$ в базисі B'.

Дійсно, матрицею оператора $\mathcal{T}$ в базисі B є матриця T; матрицею переходу від базису B до базису B' є також матриця T. Тому матрицею оператора $\mathcal{T}$ в базисі B' є матриця

$$T\cdot T\cdot T^{-1}=T\,.$$

Нехай A і B - матриці $n-$го порядку над полем P.

Матриця B називається подібною до матриці A, якщо існує така неособлива матриця $n-$ого порядку Q над полем P, що

$$B=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$$

Теорема. На множині M_n всіх матриць $n-$ого порядку над полем P подібність матриць є відношенням еквівалентності.

Якщо матриця A задає лінійний оператор $\mathcal{A}$ в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$, то і будь-яка матриця B подібна матриці A,

$$B=Q^{-1}AQ$$

тож задає оператор $\mathcal{A}$ в деякому базисі B', а саме в базисі $B'<\vec{e}_1^{\,\prime},\vec{e}_2^{\,\prime},...,\vec{e}_n^{\,\prime}>$, пов'язаному з базисом $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ матрицею переходу $T=Q^{-1}$.

Отже, всі матриці класу подібних матриць, і тільки вони, задають в різних базисах простору L_n один і той же лінійний оператор цього простору.

Властивості подібних матриць:

1. Подібні матриці мають рівні визначники.
2. Подібні матриці A і B або одночасно особливі, або одночасно неособливі.

10.04.2020

Дисципліна «Диференціальна геометрія і топологія» (група 321)

Тема лекції: Перша квадратична форма поверхні

Короткий зміст лекції: виведення першої квадратичної форми; поняття обчислення довжини дуги лінії на поверхні; формула довжини дуги на поверхні; поняття кута між дотичними в точці; виведення формули для обчислення площі компактної поверхні; поняття ортогональності координатної сітки.

Основні поняття лекції:

Нехай задана гладка поверхня F_0 рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

Як відомо диференціал в точці $M \epsilon\, F_0$ має вид :

$$d\vec{r} = \overrightarrow{r_u} du + \overrightarrow{r_v} dv.$$

Піднесемо рівність до скалярного квадрату, тоді отримуємо

$$(d\vec{r})^2 = \overrightarrow{r_u}^2 (du)^2 + 2\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}\, du dv + \overrightarrow{r_v}^2 (dv)^2.$$

Введемо такі позначення : $\gamma_{11} = \overrightarrow{r_u}^2,\ \gamma_{12} = \overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v},\ \gamma_{22} = \overrightarrow{r_v}^2,$ тоді рівність

$d\vec{r} = \overrightarrow{r_u} du + \overrightarrow{r_v} dv$ буде мати такий вид :

$$(d\vec{r})^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22}(dv)^2.$$

Права частина рівності називається *першою квадратичною формою поверхні* F_0 або її *лінійним елементом.* Відмітимо, що коефіцієнти квадратичної форми є функції від u та v.

Нехай на поверхні F_0, яка задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, задана гладка лінія γ: $u = u(t),\ v = v(t)$, де $t \in I$. Лінія γ у просторі задається рівнянням $\vec{r} = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big)$. Продиференцюємо його по параметру t:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r_u}\frac{du}{dt} + \overrightarrow{r_v}\frac{dv}{dt}.$$

Відмітимо, що $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, де s –довжина дуги γ. Отже, з $\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r_u}\frac{du}{dt} + \overrightarrow{r_v}\frac{dv}{dt}$ випливає

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

З формули маємо

$$(ds)^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2,$$

тобто *значення першої квадратичної форми поверхні є квадрат диференціала довжини дуги гладкої лінії, яка лежить на поверхні, при нескінченно малому зміщенні точки вздовж цієї лінії.*

З рівності $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$ отримуємо формулу довжини дуги на поверхні:

$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

де $t_1 < t_2$ i $M_1(t_1), M_2(t_2)$ –кінці дуги.

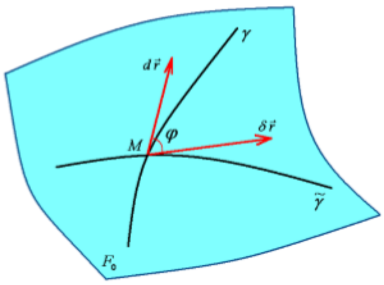


Рис.10.1

Нехай $\gamma, \tilde{\gamma}$ – дві гладкі лінії на поверхні F_0, які проходять через точку M. *Кутом між лініями γ та $\tilde{\gamma}$* називається кут між їх дотичними в точці M. Нехай d i δ – символи диференціювання вздовж ліній γ і $\tilde{\gamma}$. Тоді $d\vec{r}$ та $\delta\vec{r}$ – вектори дотичних до ліній γ і $\tilde{\gamma}$ в точці M. Позначимо через φ кут між γ і $\tilde{\gamma}$, тоді, очевидно, $\varphi = (\widehat{d\vec{r}, \delta\vec{r}})$, тому

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r}, \delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|}.$$

Але $d\vec{r} = \vec{r_u}du + \vec{r_v}dv, \quad \delta\vec{r} = \vec{r_u}\delta u + \vec{r_v}\delta v$, тому підставляючи ці значення в формулу будемо мати :

$$\cos\varphi = \frac{\gamma_{11}du\delta u + 2\gamma_{12}(du\delta v + dv\delta u) + \gamma_{22}dv\delta v}{\sqrt{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2}\sqrt{\gamma_{11}(\delta u)^2 + 2\gamma_{12}\delta u\delta v + \gamma_{22}(\delta v)^2}}$$

Якщо $\gamma - u$ −лінія (тобто $dv = 0$), $\tilde{\gamma} - v$ −лінія (тобто $\delta u = 0$), то формула набуває вигляд :

$$\cos\varphi = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}}.$$

З рівності випливає, що для того щоб координатна сітка на поверхні була ортогональною ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), необхідно і достатньо, що в кожній точці цієї поверхні виконувались рівність $\gamma_{12} = 0$.

Нехай $F -$ поверхня з краєм, яка задовольняє умови :

1. F гомеоморфна замкненому кругу;
2. F є частина деякої гладкої поверхні Ф;
3. край поверхні F є кусочно-гладка лінія.

З курсу математичного аналізу відомо, що F квадровна, тобто має площу. Нехай в прямокутній системі координат O_{xyz} задана поверхня рівнянням $z = f(x, y)$, де $(x, y) \epsilon D$ в площині O_{xy} $i\ D$ гомеоморфна замкненому кругу. Тоді площа $S(F)$ поверхні, як відомо, обчислюється за формулою :

$$S(F) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}\, dxdy.$$

Якщо F задана параметричними рівняннями

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = y(u, v),$$

то, площа поверхні обчислюється за формулою :

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\, dudv,$$

де $G -$ відповідна поверхні F область зміни параметрів $u\ i\ v$.

Якщо $\vec{r}(u,v)$ –векторна функція з координатами $x(u,v), y(u,v), y(u,v),$ то в кожній точці (u,v) поверхні F виконується рівність :

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2} = |[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]|.$$

Доведемо. Справді, якщо $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}})$, то

$$|[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]| = |\overrightarrow{r_u}||\overrightarrow{r_v}|\sin\varphi = |\overrightarrow{r_u}||\overrightarrow{r_v}|\sqrt{1-cos^2\varphi} = \sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}\sqrt{1-\frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22}}}$$

$$= \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}$$

Таким чином, з $S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}\, dudv$ маємо, що

$$S(F) = \iint_G |[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]|\, dudv.$$

Висновок. Знаючи першу квадратичну форму поверхні ми можемо :

1. обчислити довжину дуги на поверхні;
2. обчислити кут між лініями на поверхні;
3. обчислити площу гладкої компактної поверхні.

13.04.2020

Дисципліна «Аналітична геометрія» (група 121)

Тема лекції: Класифікація рухів площини

Означення 1.21. *Точка називається інваріантною (або нерухомою), якщо вона переходить при русі сама в себе.*

Означення 1.22. *Пряма називається інваріантною відносно даного руху, якщо довільна її точка переходить в точку на цій же прямій.*

Якщо кожна точка прямої є нерухомою, то, очевидно, така пряма буде інваріантною, при цьому її називають *прямою інваріантних точок.*

Лема 1.3 (існування інваріантної прямої). *Якщо рух g не має жодної інваріантної точки, то він має хоча б одну інваріантну пряму.*

Лема 1.4. *Якщо рух g промінь h переводить сам в себе, то g є або тотожне перетворення, або відображення[16] від прямої p, яка містить промінь h.*

Класифікація рухів першого роду. Розглянемо наступні три випадки:

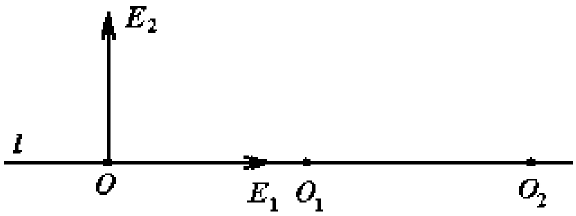
1) *Рух має більше ніж одну інваріантну точку.* Нехай A і B — дві нерухомі точки руху, тоді промінь AB переходить при русі сам в себе, а тому за лемою 1.4 даний рух є тотожне перетворення.[17]

2) *Рух має тільки одну інваріантну точку.* Виберемо ортонормований репер (O, E_1, E_2) так, щоб точка O була нерухомою, тобто $O \mapsto O$. Виходячи з (1.70) запишемо тепер формули цього руху. Ясно, що $\varepsilon = 1$ і $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, тому шукані формули будуть такі:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

які співпадають з формулами повороту площини (1.73). Таким чином, якщо рух має лише одну інваріантну точку, то це буде поворот площини навколо цієї точки.

3) *Рух немає жодної інваріантної точки.* Оскільки рух немає жодної інваріантної точки, то за лемою 1.3 він має хоч одну інваріантну пряму. Візьмемо одну з них і позначимо її через l. Виберемо тепер ортонормований репер (O, E_1, E_2) таким чином, щоб $O \in l$, $E_1 \in l$. Нехай рух точку O переводить в точку O_1, а точку O_1 — в точку O_2. Відзначимо, що точка O_2 не може співпасти з точкою O, інакше середина відрізка OO_1 була б нерухомою, що суперечило б умові. Крім того ясно, що всі три точки O, O_1, O_2 належать прямій l, оскільки ця пряма інваріантна, причому ці точки розташовані на прямій так, як вказано на малюнку.



Оскільки $OO_1 = O_1O_2$, то O_1 — середина відрізка OO_2 а тому координати точок будуть такі: $O(0,0)$, $O_1(a,0)$, $O_2(2a,0)$, де a — дійсне число. При даному русі g маємо $O \xrightarrow{g} O_1$, $O_1 \xrightarrow{g} O_2$, тому згідно формул (1.70) $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $a = a\cos\alpha$ і $0 = \sin\alpha$, звідки слідує, що $\cos\alpha = 1$ і $\sin\alpha = 0$. Таким чином формули руху в даному випадку набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x' &= x + a; \\ y' &= y. \end{aligned} \tag{1.74}$$

З формул (1.74) випливає, що даний рух є паралельне перенесення площини (див. стор. 40) на ненульовий вектор $\vec{p}(a,0)$. Дійсно, якщо $M(x,y)$ — довільна точка, а $M'(x',y')$ — її образ, то з формул (1.74) отримуємо $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Отже, ми показали, що коли рух першого роду немає жодної інваріантної точки, то він є паралельне перенесення площини на ненульовий вектор. І нарешті, відмітимо, що довільна пряма, яка паралельна вектору $\vec{p}$ є інваріантною прямою цього паралельного перенесення. Інших інваріантних прямих немає.

Класифікація рухів другого роду. Запишемо формули руху другого роду, поклавши $\varepsilon = -1$ в формулах в (1.70):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha - y_0. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Будемо шукати інваріантні точки руху. Якщо $M(x,y)$ — інваріантна точка, то для визначення її координат необхідно в (1.75) покласти $x' = x$, $y' = y$ і розв'язати отриману систему рівнянь. Отже, зробивши це, ми отримаємо таку систему рівнянь:

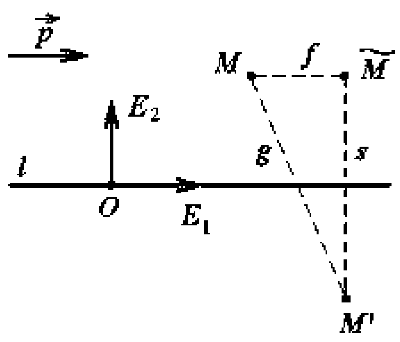
$$\begin{cases} (\cos\alpha - 1)x + \sin\alpha \cdot y + x_0 = 0, \\ \sin\alpha \cdot x - (\cos\alpha + 1)y + y_0 = 0. \end{cases} \tag{1.76}$$

Обчислимо визначник системи (1.76): $\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -(\cos\alpha + 1) \end{vmatrix} = -(\cos^2\alpha - 1) - \sin^2\alpha = 0.$ Отже, дана система або має безліч розв'язків, або несумісна, тобто немає розв'язків. Таким чином, довільний рух другого роду або має пряму інваріантних точок, або немає жодної інваріантної точки.

1) *Рух g має пряму інваріантних точок.* Нехай h — промінь на цій прямій, тоді, очевидно, $g(h) = h$, а тому за лемою 1.4 рух g є осьова симетрія.

2) *Рух g немає інваріантних точок.* В цьому випадку рух має інваріантну пряму, згідно леми 1.3. Позначимо її через l. Виберемо тепер ортонормований репер (O, E_1, E_2) таким чином, щоб $O \in l$, $E_1 \in l$ (див. рис. на стор. 48). Нехай рух точку O переводить в точку O_1, а точку O_1 — в точку O_2. Очевидно, що $O_2 \neq O$. Оскільки $OO_1 = O_1O_2$, тому координати точок будуть такі: $O(0,0)$, $O_1(a,0)$, $O_2(2a,0)$, де $a \in \mathbb{R}$. При даному русі g маємо $O \xrightarrow{g} O_1$, $O_1 \xrightarrow{g} O_2$, тому згідно формул (1.70) отримуємо $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $\cos\alpha = 1$ і $\sin\alpha = 0$. Таким чином формули руху в даному випадку будуть такі:

$$\begin{aligned} x' &= x + a; \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{1.77}$$



Неважко бачити, що даний рух g є суперпозицією двох перетворень f і s, які задаються такими формулами:

$$f\colon \begin{aligned} \tilde{x} &= x + a; \\ \tilde{y} &= y; \end{aligned} \qquad s\colon \begin{aligned} x' &= \tilde{x}; \\ y' &= -\tilde{y}, \end{aligned}$$

причому $g = s \circ f$. Згідно формул (1.74) перетворення f є паралельне перенесення площини на вектор $\vec{p}(a,0)$, який паралельний вісі Ox, а s (див. приклад 2 на стор. 47) — осьовою симетрією відносно вісі абсцис. Такий рух називається *ковзною симетрією*.

Нехай M — довільна точка, M' — її образ при ковзній симетрії $g = s \circ f$, тобто $g(M) = M'$, тому $M' = s \circ f(M) = s(f(M))$. Нехай $f(M) = \widetilde{M}$ і $s(\widetilde{M}) = M'$. Таким чином,

$$M \xrightarrow{g} M' \iff M \xrightarrow{f} \widetilde{M} \wedge \widetilde{M} \xrightarrow{s} M'.$$

Отже існує чотири типи рухів, які наведені в наступній таблиці.

Назва руху	Інваріантні точки	Інваріантні прямі
I. Рухи першого роду		
1. Поворот на кут α а) Поворот на кут $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq \pm\pi$	Центр повороту	Немає
б) Тотожне перетворення $(\alpha = 0)$	Довільна точка площини	Довільна пряма площини
в) Центральна симетрія $(\alpha = \pm\pi)$	Центр симетрії	Довільна пряма, яка проходить через центр симетрії
2. Паралельне перенесення на вектор $\vec{p}$ а) Паралельне перенесення на вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$	Немає	Довільна пряма, паралельна вектору $\vec{p}$
б) Тотожне перетворення $(\vec{p} = \vec{0})$	Довільна точка площини	Довільна пряма площини
II. Рухи другого роду		
3. Осьова симетрія	Всі точки осі	Вісь симетрії і довільна пряма, перпендикулярна до неї
4. Ковзна симетрія	Немає	Одна пряма

20.04.2020

Дисципліна «Аналітична геометрія» (група 121)

Тема лекції: Група рухів площини та її підгрупи

З чотирьох типів руху осьова симетрія відіграє особливу роль, про що свідчить наступна теорема.

Теорема 1.26. *Довільний рух g площини є або осьовою симетрією, або добутком не більше трьох осьових симетрій.*

Позначимо через D множину всіх рухів площини. Можна довести, що добуток двох рухів є знову рух. Дійсно, нехай g і f — рухи. Оскільки вони є перетвореннями площини, то $f \circ g$ також є перетворенням площини. Але кожний з рухів g і f зберігає відстань, тому і $f \circ g$ також зберігає відстань. Отже, $f \circ g$ — рух. Таким чином, якщо $f \in G$ і $g \in G$, то $f \circ g \in G$. Далі, якщо $g \in G$, то $g^{-1} \in G$. Таким чином (див. стор. 39), множина D є групою перетворень, і ми її називаємо *групою рухів площини.*

Довільний рух першого роду зберігає орієнтацію площини. Звідси робимо висновок, що коли g і f — рухи першого роду, то і $f \circ g$ — рух першого роду. З іншого боку, якщо g і f — рухи другого роду, то кожний з них змінює орієнтацію площини, а тому $f \circ g$ — рух *першого роду.* Відмітимо, нарешті, що коли f — рух першого роду, а g — рух другого роду, то $g \circ f$ — рух *другого роду.*

Нехай F — деяка фігура, Ті властивості фігури F, які зберігаються при всіх рухах, називаються *інваріантними властивостями* цієї фігури, відносно групи D. Наприклад, відстань між точками, або властивості бути відрізком, променем прямої — приклади інваріантних властивостей фігури відносно групи рухів D.

Розглянемо найважливіші підгрупи групи D і вкажемо деякі інваріанти цих підгруп, які не є інваріантами групи D.

1) Позначимо через D_1 множину всіх рухів першого роду. Довільний рух першого роду зберігає орієнтацію площини, тому, коли $g, f \in D_1$, то $f \circ g \in D_1$ і також $g^{-1} \in D_1$. Отже, D_1 — підгрупа групи D. Вона називається *групою рухів першого роду.* Очевидно орієнтація репера — інваріант групи D_1.

2) Нехай $D_1(M_0)$ — множина рухів першого роду, для яких M_0 — нерухома точка. Очевидно, $D_1(M_0) \subset D_1$. Очевидно, що $D_1(M_0)$ — підгрупа групи D_1. Ця група складається зі всіх обертань навколо точки M_0. Вона називається *групою обертань площини навколо точки M_0*. Інваріантом цієї групи є відстань довільної точки M до центра повороту M_0.

3) Розглянемо множину T, яка містить всі паралельні перенесення площини. Очевидно, $T \subset D_1$. Неважко бачити, що коли f і g є паралельні перенесення відповідно з векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, то $g \circ f$ — паралельне перенесення на вектор $\vec{p} - \vec{q}$. Звідси випливає, що T є підгрупа групи D_1; вона називається *групою перенесень площини.* Інваріантом цієї групи є напрямок.

Означення 1.23. *Дві фігури F і F' називаються рівними, якщо вони D-еквівалентні (див. стор. 40), тобто якщо існує такий рух $g \in D$, що $F' = g(F)$, при цьому пишуть $F = F'$.*

Оскільки D-еквівалентність фігур є відношення еквівалентності на множині всіх фігур площини, то справедливі такі властивості рівності:

1°. $F = F$ для довільної фігури F (*рефлексивність рівності*).

2°. $F_1 = F_2 \Longrightarrow F_2 = F_1$ (*симетричність рівності*).

3°. $F_1 = F_2 \wedge F_2 = F_3 \Longrightarrow F_1 = F_3$ (*транзитивність рівності*).

Для того, щоб встановити рівність двох фігур, не обов'язково доводити існування руху, який одну фігуру переводить в другу. В деяких випадках вдається встановити рівність фігур, порівнюючи деякі їх елементи. Розглянемо, наприклад, рівність трикутників.

Теорема 1.27. *Для того щоб $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності*[18]*:*

$$\begin{aligned} \angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C', \\ AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'. \end{aligned} \tag{1.80}$$

24.04.2020

Дисципліна «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

(групи 131, 132, 141, 161)

Тема лекції: Лінійні оператори

Нехай $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ - деякі лінійні оператори простору L_n.

1. Оператор $\mathcal{S}$, який кожному вектору $\vec{x} \in L_n$ ставить у відповідність вектор $\vec{x}\mathcal{A} + \vec{x}\mathcal{B}$, називається сумою операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, позначається $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Отже, $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ означає, що $\forall \vec{x} \in L_n \quad \vec{x}\mathcal{S} = \vec{x}\mathcal{A} + \vec{x}\mathcal{B}$.

2. Добутком лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ називається оператор $\mathcal{C}$, який визначається за формулою $\forall \vec{x} \in L_n \quad \vec{x}\mathcal{C} = (\vec{x}\mathcal{A})\mathcal{B}$, позначається $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$.

3. Добутком лінійного оператора $\mathcal{A}$ на число α називається оператор $\mathcal{D}$, який визначається за формулою $\forall \vec{x} \in L_n \ \forall \alpha \in P \quad \vec{x}\mathcal{D} = \alpha\vec{x}\mathcal{A}$, позначають $\mathcal{D} = \alpha\mathcal{A}$.

Властивості операцій над лінійними операторами:

1. Сума лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ є лінійний оператор.
2. Операція додавання лінійних операторів асоціативна і комутативна.
3. Добуток лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ є лінійний оператор.
4. Операція множення операторів асоціативна і пов'язана з операцією додавання дистрибутивними законами.
5. Добуток лінійного оператора $\mathcal{A}$ на число λ є лінійний оператор.

Нехай $A = (\alpha_{ik})$ і $B = (\beta_{ik})$ - матриці лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$.

Знайдемо S, C, D, які задають в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ оператори $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$. За означенням матриці лінійного оператора маємо:

$$\vec{e}_i\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\vec{e}_k \, , \ \vec{e}_i\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\vec{e}_k \quad \left(i = \overline{1,k}\right)$$

Оскільки $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, то

$$\vec{e}_i S = \vec{e}_i(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \vec{e}_i\mathcal{A}+\vec{e}_i\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\vec{e}_k + \sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}+\beta_{ik})\vec{e}_k \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

Отже, $S=(\alpha_{ik}+\beta_{ik})$, тобто $S=A+B$.

Аналогічно, оскільки $C=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$, то

$$\vec{e}_i C = (\vec{e}_i\mathcal{A})\mathcal{B} = \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\vec{e}_k\right)\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(\vec{e}_k\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\vec{e}_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}\beta_{kj})\vec{e}_j\right)$$

$$\left(i=\overline{1,n}\right)$$

Отже, $C=(c_{ij})$, де $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}$, тобто $C=A\cdot B$.

Нарешті, оскільки $\mathcal{D}=\lambda\mathcal{A}$, то $\vec{e}_i\mathcal{D}=\vec{e}_i(\lambda\mathcal{A})=\lambda(\vec{e}_i\mathcal{A})=\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\vec{e}_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda\alpha_{ik}\vec{e}_k$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Отже, $D=(\lambda\alpha_{ik})$, тобто $D=\lambda A$.

Отже, якщо лінійним операторам $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ відповідають матриці A і B, то оператору $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ відповідає матриця $A+B$, оператору $\mathcal{A}\mathcal{B}$ - матриця $A\cdot B$ і оператору $\lambda\mathcal{A}$ - матриця λA. Тому встановлена відповідність є ізоморфізм.

Нехай M - деяка підмножина $n-$вимірного лінійного простору L_n і $\mathcal{A}$ - довільний лінійний оператор цього простору. Оператор $\mathcal{A}$ переводить кожний вектор $\vec{x}\in M$ в деякий вектор $\vec{x}\mathcal{A}$, який є образом вектора $\vec{x}$.

Сукупність образів всіх векторів множини M називається образом множини M відносно оператора $\mathcal{A}$, позначають $M\mathcal{A}$.

Теорема 1. Образ будь-якого лінійного підпростору U простору L_n відносно будь-якого лінійного оператора $\mathcal{A}$ також є підпростором простору L_n.

Сукупність $L_n\mathcal{A}$ образів усіх векторів простору L_n називається областю значень лінійного оператора $\mathcal{A}$.

Іноді область значень лінійного оператора $\mathcal{A}$ називають образом оператора $\mathcal{A}$ і позначають символом $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. З теореми 1 випливає, що образ лінійного оператора $\mathcal{A}$ є лінійний підпростір простору L_n.

Розмірність області значень $L_n\mathcal{A}$ називають рангом оператора $\mathcal{A}$ і позначають $rang\,\mathcal{A}$.

Теорема 2. Ранг будь-якого лінійного оператора простору L_n дорівнює рангу матриці цього оператора у довільно обраному базисі.

Ядром лінійного оператора $\mathcal{A}$ простору L_n називається сукупність всіх векторів цього простору, які оператором $\mathcal{A}$ відображаються в нульовий вектор $\vec{0}$.

Ядро лінійного оператора позначається символом $Ker\mathcal{A}$.

Розмірність ядра оператора $\mathcal{A}$ називається дефектом цього оператора.

Ядро лінійного оператора є підпростором простору L_n.

Теорема 3. Сума рангу і дефекту лінійного оператора $\mathcal{A}$ простору L_n дорівнює розмірності n цього простору

$$\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) + \dim(Ker\mathcal{A}) = \dim L_n$$

Нехай $\mathcal{A}$ - лінійний оператор, що діє в $n-$вимірному просторі L_n. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n називається не виродженим, якщо його ранг дорівнює n; оператор $\mathcal{A}$ називається виродженим, якщо його ранг менше n.

Отже, лінійний оператор $\mathcal{A}$ не вироджений якщо:

1. Область значень $L_n\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ співпадає з простором L_n;
2. дефект оператора дорівнює нулю;
3. ядро оператора $\mathcal{A}$ складається тільки з нульового вектора.

Теорема 4. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n не вироджений тоді і тільки тоді, коли його матриця A в довільно вибраному базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ простору L_n неособлива.

Теорема 5. Не вироджений лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n взаємно однозначно відображує простір L_n на весь L_n.

Теорема 6. Не вироджений лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n будь-яку лінійно незалежну систему векторів цього простору переводить в лінійно незалежну систему.

Лінійний оператор $\mathcal{B}$ простору L_n називається оберненим до лінійного простору $\mathcal{A}$, якщо $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ - одиничний оператор. Обернений оператор позначають $\mathcal{A}^{-1}$.

Обернений оператор переводить кожний вектор $\vec{x}\mathcal{A}$ у вектор $\vec{x}$.

Теорема 7. Для того щоб існував оператор $\mathcal{A}^{-1}$ обернений до оператора $\mathcal{A}$ необхідно і достатньо, щоб оператор $\mathcal{A}$ був не виродженим.

З теореми випливає ще одне означення не виродженого оператора, а саме: *не виродженим лінійним оператором* називається лінійний оператор, для якого існує обернений оператор.